第3卷 第8期
1998年8月

中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics

Vol.3, No.8
Aug. 1998

# 基于超复数系的分形准全息图象生成*

曹汉强　朱光喜　朱耀庭

(华中理工大学电信系,武汉　430074)

**摘　要**　提出了一种新型分形准全息图象,并采用基于超复数系分形图象的生成方法进行分形准全息图象序列的生成,生成的分形准全息图象在激光防伪等领域有着良好的应用前景。文中还给出了超复数系中分形三维图象生成的快速算法和生成结果。

**关键词**　分形,准全息图象,超复数系,图象生成

## 1　引　言

分形几何学是关于自然形态的几何学[1],它为自然界许多复杂景物的模拟提供了十分卓越的工具。分形的计算机模拟采用少量的数据来生成复杂的自然景物图象,例如起伏的山脉、漂浮的云彩和形态各异的植物等自然界中的各种景观[2],极大地丰富了计算机图形学内容,已成为一个日益发展的领域。本文提出了一种新型分形准全息图象,并采用基于超复数系分形图象的生成方法,在高维空间的不同截面生成分形准全息图象序列,既能充分展示分形图象内部的精细结构,还能更直观地观察和分析其内部性质。将分形准全息图象序列合成全息防伪标志,可应用于激光全息防伪。本文还同时提出了超复数系中三维分形图象生成的快速算法,给出了实验结果和分析。

## 2　分形准全息图象

分形几何具有的最重要特性之一是在任意放大比例下的近似不变性,这种统计意义上的自相似性正是许多自然景物所具有的根本特征,A. Pentland证明了多数自然景物具有分形特点[3]。自然界的自相似性,往往表现为同一规则在不同层次或不同阶段的连续实现和反复重演,若是局部结构上显示为整体结构的缩影,我们称这种连续实现和反复重演为“结构全息”;若是发展中的某一时刻显示为整个过程的缩影,我们称这种连续实现和反复重演为“时间全息”。并且我们将描述具有结构全息或时间全息的系列图象称为分形准全息图象。分形准全息图象可以采用不同的模型来生成,例如,在离散分形布朗随机场中,通过控制多尺度 Hurst 参数,可以生成图象灰度逐渐变化的自然场景;在迭代函数系统中,通过控制迭代参数随时间变化而变化,可以生成一系列具有内在联系而又各不相同的图象。本文采用了基于超复数系的分形准全息序列图象生成方法。

计算机全息图是一种新型的数字全息图形与图象(简称数字全息图),这种数字全息图无需像计算光学全息那样计算整个全息图的光场分布,而是将计算工作集中于图象构造和渲染绘制,从而可以根据人的需要制作显示光栅全息图象。数字全息图不依赖物体的实际存在,而是把物体的数学描述输入计算机处理后而制成全息图,它比一般的光全息有很多独特的优点,抗外界干扰能力强,便于修改,不易仿制等。通过计算机系统直接控制光学系统中的浮雕光刻可以实现分形准全息图象到数字全息图的转换,制成全息图片,形成全息防伪商标,应用于激光全息防伪。

* 国家自然科学基金资助项目(No. 69672014)
收稿日期:1997-08-11,收到修改稿日期:1997-09-26

## 3 超复数系及其运算

形如 $a_1+a_2i_1+a_3i_2+\cdots+a_ni_{n-1}$ (1)

的 $n$ 个实数数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为 $n$ 阶超复数。式(1)中 $i_1,i_2\cdots i_{n-1}$ 是虚数单位，数组之中每一个实数都叫做这个超复数的坐标。$n=4$ 时，即为四元数。

设有 2 个超复数 $c_1=a_1+a_2i_1+a_3i_2+\cdots+a_ni_{n-1}$，$c_2=b_1+b_2i_1+b_3i_2+\cdots+b_ni_{n-1}$，

加法运算的定义为：

$$c_1+c_2=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)i_1+(a_3+b_3)i_2+\cdots+(a_n+b_n)i_{n-1} \quad (2)$$

$c_1$ 自乘运算的定义为：

$$c_1^2=(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2)+2a_1a_2i_1+2a_1a_3i_2+\cdots+2a_1a_ni_{n-1} \quad (3)$$

自乘运算满足结合律但不满足交换律。

上述超复数及其运算组成的超复数系(hypercomplex number system)是采用倍增方法实现的[4]。设 $A=a_1+a_2e_i$ 和 $B=b_1+b_2e_i$ 是二维复数，$a_1$，$a_2$ 和 $b_1$，$b_2$ 为实数，$e_i$ 为虚数单位，按倍增表达式 $A+Be_j$($e_j$ 为一新的虚数单位)进行倍增可得：

$$(a_1+a_2e_i)+(b_1+b_2e_i)e_j=a_1+a_2e_j+b_1e_i+b_2e_ie_j \quad (4)$$

令式中 $e_i=i,e_j=j,e_ie_j=k$，不难看出上式与四元数 $a+bi+cj+dk$ 的形式完全一致。继续此倍增过程，即可得到 $n$ 阶超复数，$n$ 为 2 的幂次方。

按照倍增表达式形式表示的超复数加法和乘法运算递归定义是：

$$(A_1+B_1e)+(A_2+B_2e)=(A_1+A_2)+(B_1+B_2)e \quad (5)$$

$$(A_1+B_1e)(A_2+B_2e)=(A_1A_2-\overline{B}_2B_1)+(B_2A_1+A_2\overline{B}_1)e \quad (6)$$

式中的 $A_i$，$B_i$ 是复数或超复数，$\overline{B}_i$ 表示 $B_i$ 的共轭超复数，$\overline{B}=b_1-b_2i_1-\cdots-b_ni_{n-1}$，实数的共轭是自身。由于在分形复二次迭代 $Z_{n+1}=Z_n^2+c$ 中，计算主要为加法运算和自乘运算，因此令式(6)中 $A_1=A_2$、$B_1=B_2$，乘法运算成为自乘运算，并可简化为式(3)计算。以 8 阶超复数为例，设 $c_1=(a_1+a_2i+a_3j+a_4k)+(a_5+a_6i+a_7j+a_8k)e_0$，则自乘运算公式应为：

$$c_1^2=(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_8^2)+2a_1a_2i_1+2a_1a_3i_2+\cdots+2a_1a_7i_6+2a_1a_8i_7 \quad (7)$$

式中 $i_1=i,i_2=j,i_3=k,i_4=e_0$，

$i_5=ie_0,i_6=je_0,i_7=ke_0$

式(1)表示的超复数中每一个元素代表一个线性无关的维数，即式(1)表示的超复数构成了 $n$ 维向量空间。我们约定 0 轴为实轴，1 轴为第一虚轴，依次类推。在该向量空间内可以生成 Mandelbrot 集和 Julia 集的四维以上空间分形准全息图象序列，有利于分析图象的自相似性和对称性等特性。

## 4 分形准全息序列图象生成

### 4.1 Mandelbrot 集准全息序列图象生成算法

Mandelbrot 集准全息序列图象的生成过程：

**步骤 a**：选定维数，建立相应的超复数系，大于指定维数的虚轴分量置 0；设初值 $Z_0=0$；

**步骤 b**：按迭代过程 $Z_{n+1}=Z_n^2+c$ 计算预定的次数，$c$ 为超复数空间中的一个点；

**步骤 c**：检测是否趋于无穷(是否大于给定的数 $M$)；如小于给定的数 $M$，$c$ 是集内一个点，绘制 $c$ 点。

**步骤 d**：对不同的 $c$，继续上述过程。

图 1 是采用该算法生成五维超复数系中 Mandelbrot 集的部分序列图象。图象取自于 0 轴和 2 轴截面，中心位于原点，1 轴偏离原点 0.1，3 轴偏离原点 0.3，4 轴偏离原点 $-0.2$，截面之间距离为 0.15。

从分形准全息序列图象中可看出超复数系中 Mandelbrot 集不同截面之间仍具有自相似性和对称性。

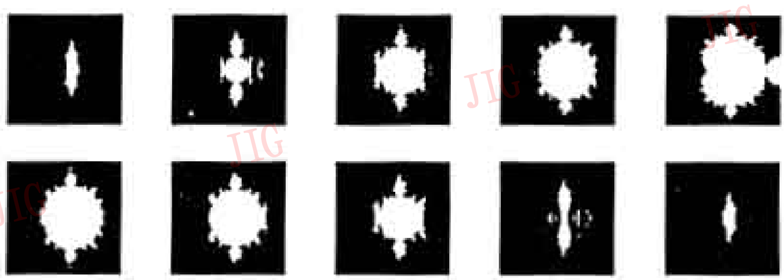

图 1 五维超复数系中的 Mandelbrot 集二维截面序列图象

### 4.2　Julia 集准全息序列图象生成算法

Julia 集准全息序列图象的主要生成步骤如下:

**步骤 a**:选定参数,建立 $n$ 维超复数系;大于指定维数的虚轴分量置 0;设 $Z_0$ 为超复数空间中的一个点;$c$ 为一超复数常数;

**步骤 b**:在超复数空间中选择一个点 $Z$,迭代过程计算时每次增加常量 $c$;

**步骤 c**:检测 $Z_n$ 是否趋于无穷(是否大于给定的数 $M$);如果 $Z_n$ 小于给定的数 $M$,是集内的一个点。

**步骤 d**:对不同的 $Z$ 和常量 $c$,继续上述过程。

图 2 是采用该算法生成的五维超复数系中的 Julia集的部分序列图象,$c=(0.0,\ -0.66,\ 0.335,\ 0.033,\ 0.356)$,图象空间与 Mandelbrot 集相同。

从序列图象中不难看出超复数系中 Julia 集仍是分形的,且具有对称性。

选择不同的 $c$ 值将产生不同的 Julia 图象序列。

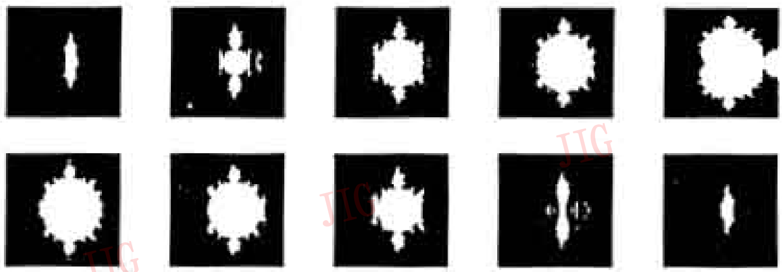

图 2　五维超复数系中的 Julia 集二维截面序列图象

### 4.3　其它分形图象的生成

除了能生成 Mandelbrot 集准全息序列图象和 Julia 集准全息序列图象外,我们还在超复数空间对不同的迭代函数进行了实验,生成各种精美的分形准全息图象序列。图 3 示出迭代函数为 $Z_{n+1}=Z_n^2-0.5*Z+c$ 的生成结果,$c=(0.563,\ 0.0,\ 0.0106,\ 0.004,\ 0.335)$。中心位于原点,1 轴偏离原点 0.2,3 轴偏离原点 0.3。

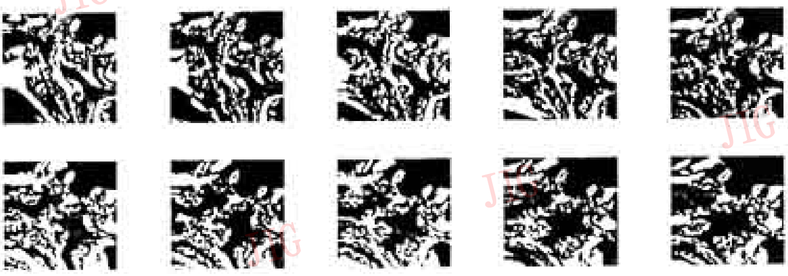

图 3　五维超复数系中的分形准全息序列图象

### 4.4　超复数系中分形三维图象的绘制

设超复数系中生成分形图象的迭代变换式为 $Fc(P)$,$c$ 为迭代参数,$P$ 为超复数空间中点。对每一个点 $P$,从 $P(0)$开始检测其是否属于给定的分形集,即根据 $P(n+1)=Fc(P(n))$求出 $Fc$ 点序列;如果在迭代一定次数后,$|P(n)|$小于预定的值,该点在集内。$|\cdot|$为分形测度。

改进的光线跟踪算法如下:设进入超复数空间和从超复数空间出来的两个交点对应的射线参数为 $\mu_0$ 和 $\mu_1$,从射线上的 $\mu_0$ 出发,由前至后按 $\Delta\mu$ 步进迭加,对于射线上的点 $Z$,如果 $Z_n<M$,则计算其邻域梯度值,并进行新的细分;一旦步进过程中达到预定的距离值,即使射线尚未到达穿出点,我们也停止这条射线上的后续计算,因而节省大量的计算时间。

图 4 是采用上述改进的射线跟踪算法绘制的八维超复数系中 Mandelbrot 集和 Julia 集三维截面图象,中心在原点。

实验表明,在超复数系空间采用改进的绘制算法有利于三维图象的快速生成,还可选择不同的空

间轴绘制分形三维图象。

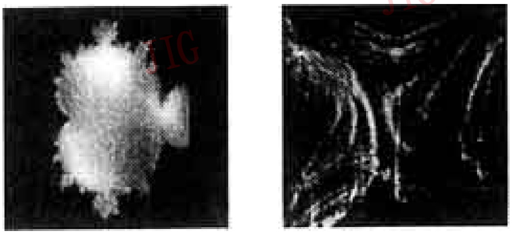

图 4 八维超复数系中的 Mandelbrot 集
和 Julia 集三维截面图象

## 5 结束语

本文提出了一种新型分形准全息图象，并采用基于超复数系分形图象的生成方法，生成了 Mandelbrot 集和 Julia 集等分形准全息序列图象。因为不同的层次和截面能揭示分形集更多的内部细节，因此可以用来分析 Mandelbrot 集和 Julia 集等分形图象的自相似性和周期性，实验结果表明，四维以上的 Mandelbrot 集和 Julia 集仍具有分形和对称性。本文还采用改进的绘制算法实现了超复数系中三维图象的快速生成。由于分形准全息图象生成具有较好的参数可控制性和不可逆转性，合成的防伪标志难以仿制，因而在激光防伪领域有着良好的应用前景。

### 参考文献


1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature, San Francisco, CA: Freeman 1982.

2 Barnsley M, Fand Demko G M. Iterated Function systems and the Global Construction of Fractals. Proc. Royal Society A, 399: 243～275.

3 Pentland A P. Fractal-based description of natural scense. IEEE Tran. PatternAnal. Mach. Intell. 1984: 661～674.

4 Kantor I L, Solodovnikov. Hypercomplex number. An Elementary Introduction to Algebras. Springer-Verlag, New York: 1989.



**曹汉强** 武汉冶金科技大学 1989 年硕士研究生毕业，现在华中理工大学攻读博士学位，主要研究领域为计算机图形学和图象处理，致力于分形理论及其在图形图象处理中的应用研究。



**朱光喜** 教授，1969 年毕业于华中工学院无线电系。近 10 年来从事分形图象模型及其在图象处理中的应用研究，已完成多项国家自然科学基金及部委基金项目，发表学术论文 60 余篇。



**朱耀庭** 教授，博士生导师，中国通信学会会士。1960 年毕业于华中工学院无线电系。长期从事通信与电子系统方面的教学和科研工作，已主持完成国家自然科学基金及部委基金项目 10 余项，其中多项成果为国内首创并达到国际先进水平，已发表学术论文 90 余篇。


# Fractal Quasi-Hologram Synthesis Based on Hypercomplex Number System


Cao Hanqiang, Zhu Guangxi, Zhu Yaoting

(*Dept. of Electronics & Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)



**Abstract** The conventional iteration algorithm for generareing fractal images is in the complex plane. In this paper we define a fractal quasi-hologram and present a rendering method based on the hypercomplex number system for generating fractal quasi-holograms in more than four dimensions. The results indicate that the Mandelbrot and Julia sets are fractal and symmetrical in these higher dimensions. The fractal quasi-holograms can also be used in laser anti-counterfeiting field.



**Keywords** Fractal, Quasi-hologram, Hypercomplex number system, Image synthesis